29.06.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika 1**

1. Izračunati x ako je četvrti član u razvoju binoma $((\sqrt{x})^{\frac{1}{logx+1}} + \sqrt[12]{x})^6$ jednak 200.

2. Riješiti matričnu jednačinu $AX^{-1}B = BA$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke $M(1;2;6)$ i $N(3;-3;7)$ a normalna je na ravan koja je zadana jednačinom $4x - 2y + z - 11 = 0$.

4. a) Odrediti brojeve a i b tako da funkcija $y = \dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ ima ekstrem u tački $T(1;\dfrac{2}{3})$.

b) Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

29.06.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika 1**

1. Izračunati x ako je četvrti član u razvoju binoma $((\sqrt{x})^{\frac{1}{logx+1}} + \sqrt[12]{x})^6$ jednak 200.

2. Riješiti matričnu jednačinu $AX^{-1}B = BA$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke $M(1;2;6)$ i $N(3;-3;7)$ a normalna je na ravan koja je zadana jednačinom $4x - 2y + z - 11 = 0$.

4. a) Odrediti brojeve a i b tako da funkcija $y = \dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ ima ekstrem u tački $T(1;\dfrac{2}{3})$.

b) Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

(#) Izračunati x ako je četvrti član u razvoju binoma $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x}\right]^6$ jednak 200.

Rj:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x}\right]^6 = \left(x^{\frac{1}{2\log x+2}} + x^{\frac{1}{12}}\right)^6 =$$

$\cdot(\log x+1)$

$$= \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(x^{\frac{1}{2\log x+2}}\right)^{6-k}\cdot\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^k = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{\frac{6-k}{2\log x+2}+\frac{k}{12}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{\frac{36-6k+k(\log x+1)}{12\log x+12}}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{2\cdot 3}}$$

Četvrti član dobijemo za $k=3$

$$\binom{6}{3}x^{\frac{6-k}{2\log x+2}+\frac{k}{12}} = 200$$

$$20\,x^{\frac{6-k}{2\log x+2}+\frac{k}{12}} = 200 \qquad /:20$$

$$x^{\frac{6-k}{2\log x+2}+\frac{k}{12}} = 10$$

$(\log x+1)$

$k=3$ pa imamo $x^{\frac{3}{2\log x+2}+\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{12}_{4}}} = 10$

$$x^{\frac{6+\log x+1}{4\log x+4}} = 10 \Rightarrow \frac{7+\log x}{4\log x+4}\cdot\log x = 1$$

$\log x = t$

$(7+t)\cdot t = 4t+4$

$t^2+7t-4t-4=0$

$t^2+3t-4=0$

$(t-1)(t+4)=0$

$t_1=1 \quad t_2=-4$

$\log x = 1$

$\log x = 1$

$x=10$

$\log x = -4$

$x = 10^{-4}$

Riješiti matričnu jednačinu $A \cdot X^{-1} \cdot B = B \cdot A$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rj.

$A X^{-1} B = B \cdot A \quad / \cdot A^{-1}$ sa lijeve strane

$X^{-1} B = A^{-1} B \cdot A \quad / \cdot B^{-1}$ sa desne strane

$X^{-1} = A^{-1} B \cdot A \cdot B^{-1} \quad /^{-1}$

$X = B A^{-1} B^{-1} A$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{kof}^{T}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{11} = 1 \quad A_{21} = -1$

$A_{12} = 0 \quad A_{22} = 1$

$A_{kof} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$A_{kof}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B_{kof}^{T}$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$B_{11} = 1$

$B_{12} = -1$

$B_{21} = 0$

$B_{22} = 1$

$B_{kof} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B_{kof}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

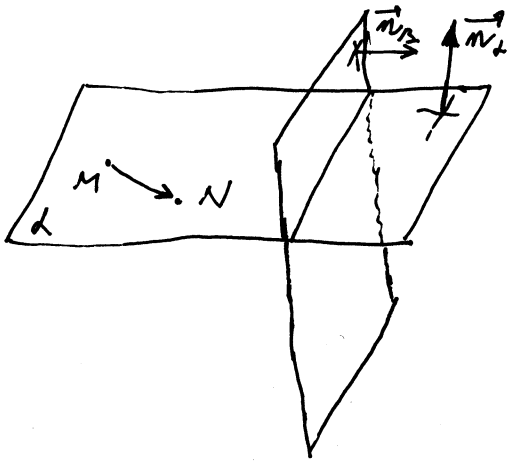
$X = B A^{-1} \cdot B^{-1} A =$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ traženo rješenje

(#) Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke $M(1; 2; 6)$ i $N(3; -3; 7)$ a normalna je na ravan koja je zadana jednačinom $4x-2y+z-11=0$.

Rj.



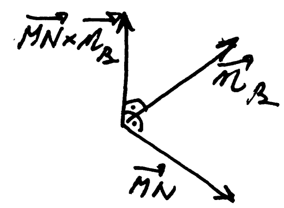
$\alpha = ?$

$\beta: 4x-2y+z-11=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\beta = (4, -2, 1)$

$\alpha \perp \beta \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$

$\vec{n}_\alpha \perp \overrightarrow{MN}$

$$\left.\begin{array}{l} M(1; 2; 6) \\ N(3; -3; 7) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2; -5; 1)$$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \\ \vec{n}_\alpha \perp \overrightarrow{MN} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_\beta \times \overrightarrow{MN} \parallel n_\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{n}_\alpha = k(\vec{n}_\beta \times \overrightarrow{MN})$$ za neko $k \in \mathbb{R}$

$$\vec{n}_\beta \times \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-2+5; -(4-2); -20+4) = (3; -2; -16)$$

$$\vec{n}_\alpha = k(3; -2; -16) = (3k; -2k; -16k)$$ za neko $k \in \mathbb{R}$

$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$ jednačina ravni kroz jednu tačku (x_1, y_1, z_1)

U našem slučaju

$$\vec{n}_\alpha = (\overset{A}{3k}; \overset{B}{-2k}; \overset{C}{-16k}) \quad i \quad M(\overset{x_1}{1}; \overset{y_1}{2}; \overset{z_1}{6})$$

$$3k(x-1) - 2k(y-2) - 16k(z-6) = 0 \quad /:k$$

$$3x \underline{-3} - 2y \underline{+4} - 16z \underline{+96} = 0$$

$$3x - 2y - 16z + 97 = 0$$ jednačina tražene ravni

Odrediti brojeve a i b tako da f-ja $y=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$ ima ekstrem u tački $T(1;\frac{2}{3})$.

Rj: Znamo da f-ja $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$ prolazi kroz tačku $T(1;\frac{2}{3})$.

$$f(1)=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a+b}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow a+b=2$$

Kako f-ja ima ekstrem u tački $T(1;\frac{2}{3})$ znamo da $f'(1)=0$

$$y'=\frac{a(x^2+x+1)-(ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$y'=0$ akko

$$a(x^2+x+1)-(ax+b)(2x+1)=0$$

$$y'(1)=0$$

$$a(1+1+1)-(a+b)(2+1)=0$$

$$3a-3a-3b=0$$

$$-3b=0$$

$$b=0$$

$$a+0=2$$

$$a=2$$

Za vrijednosti $a=2$ i $b=0$ f-ja ima ekstrem u tački $T(1;\frac{2}{3})$.

Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

Rj: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}\ /:n}{n+1\ /:n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^3}+\frac{n}{n^3}}}{1+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}=\frac{0}{1}=0$